Total number of printed pages–11

2024

MATHEMATICS

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$, find the value of $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$.

যদি $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$ অৰ মান উলিওৱা।

(b) State whether the statement is true **or** false, "The absolute value of a continuous function is continuous."

"অবিচ্ছিন্ন ফলন এটাৰ পৰম মানৰ ফলনটোত অবিচ্ছিন্ন।" উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা লিখা।

(c) Write the Maclaurin's series for e^x.

e^x-অৰ মেক্লৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

(d) Can the intermediate value theorem be used to determine the number of roots within an interval?

এটা অন্তৰালত থকা মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিবলৈ Intermediate value theorem ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি নে?

(e) What is the nth derivative of x^n?

x^n-অৰ n-তম অৱকলজটো কি?

(f) Write the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$ -ৰ মান লিখা।

(g) Write the domain of the function

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\,.$$

$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

(h) What is the slope of the surface $z = xy^2$ in the x-direction at the point $(2, 3)$?

$z = xy^2$ পৃষ্ঠৰ $(2, 3)$ বিন্দুত x-অৰ দিশত প্ৰৱণতা কিমান?

2. Answer **any six** questions : 2×6=12

যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find (মান উলিওৱা) : $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 - 5}$

(b) If the function $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \le 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$ is continuous everywhere, then find the value of k.

যদি $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \le 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$ ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে k-অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) State the squeezing theorem for the functions f, g and h.

f, g আৰু h ফলনৰ বাবে স্কুইজিং উপপাদ্যটো লিখা।

(d) If (যদি) $y = e^{a \sin^{-1} x}$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(1-x^2)^2 y_2 - xy_1 - ay^2 = 0$$

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

(f) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 + 1$ in the interval $[-1, 1]$.

$f(x) = x^2 + 1$ ফলনৰ $[-1, 1]$ অন্তৰালত ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

(g) If $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, find $\frac{\partial w}{\partial x}$ and $\frac{\partial w}{\partial y}$ at point $(2, 1, -1)$.

যদি $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, $(2, 1, -1)$ বিন্দুত $\frac{\partial w}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial w}{\partial y}$ অৰ মান উলিওৱা।

(h) Define homogeneous function. State Euler's theorem on homogeneous function. 1+1=2

সুষম ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। সুষম ফলনৰ বাবে ইউলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(i) If $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$, find $\frac{d^3 f}{dx^3}$ when $x = 0$.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$ ফলনৰ $x = 0$ বিন্দুত $\frac{d^3 f}{dx^3}$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(j) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x),\ x > 0$$

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$$ 2

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \frac{1}{2}$$ 3

(b) If $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

show that f is not derivable at $x = 0$.

যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

দেখুওৱা যে $x = 0$ বিন্দুত f ফলনটো অৱকলনীয় নহয়।

(c) State and prove Leibnitz theorem. 1+4=5

লীবনিটজৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/3} tan^n x dx$, show that

$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$.

যদি $I_n = \int_0^{\pi/3} tan^n x dx$ হয়, দেখুওৱা যে

$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$.

(e) Expand $log(1+x)$ by Maclaurin's theorem.

মেক্‌ল'ৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $log(1+x)$ ক বিস্তাৰিত কৰা।

(f) Write Taylor's polynomial for a function f. Find the nth Taylor's polynomial for $\frac{1}{x}$ and express it in sigma notation. 2+2+1=5

ফলন f-ৰ বাবে টয়লৰছৰ বহুপদ ৰাশিটো লিখা। $\frac{1}{x}$ অৰ বাবে টয়লৰছৰ n তম বহুপদ ৰাশিটো লিখা আৰু ইয়াক ছিগ্‌মাৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(g) Sketch the level surface of $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ফলনটোৰ পৃষ্ঠস্তৰ অংকন কৰা।

(h) If $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, show that

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

যদি $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x}.$$

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নৰ ***যিকোনো দুটাৰ*** উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) *(i)* Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : 5

(1) $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right)$

(ii) If the function

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , \quad x \le 0 \\ x^2 + 3a - b & , \quad 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

is continuous everywhere, then find the values of the constants a and b. 5

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , \quad x \le 0 \\ x^2 + 3a - b & , \quad 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হলে a আৰু b-অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Obtain the reduction formula for $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. Using it evaluate—

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx$

6+2+2=10

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ -ৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কৰি মান উলিওৱা ঃ

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx$

(c) State and prove Lagrange's Mean value theorem. What is its geometrical interpretation ? Verify mean value theorem for function

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \text{ in } \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

1+4+2+3=10

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা। ইয়াৰ ভৌতিক অৰ্থ কি? $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ফলনটোৰ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ অন্তৰালত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

(d) (i) Prove that if a function f is differentiable at x_0, then f is continuous at x_0. Is converse of the theorem true? 3+1=4

প্ৰমাণ কৰা যে ফলন f, x_0 বিন্দুত অৱকলনীয় হ'লে f ফলনটো x_0 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়। উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত উক্তিটো সঁচা নে?

(ii) For $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, show that

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, \text{ if } n \text{ is odd} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \ldots \{(n-2)^2 - m^2\}, \text{ if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

6

$y = \cos(m \sin^{-1} x)$-ৰ কাৰণে দেখুওৱা যে,

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, \text{ যদি } n \text{ অযুগ্ম হয়} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \ldots \{(n-2)^2 - m^2\}, \text{ যদি } n \text{ যুগ্ম হয়।} \end{cases}$$

(e) (i) Let $f(x, y) = \sqrt{y+1} + ln(x^2 - y)$. Find $f(e, 0)$ and sketch the natural domain of f. 1+4=5

ধৰা হ'ল $f(x, y) = \sqrt{y+1} + ln(x^2 - y)$। $f(e, 0)$ মান নিৰ্ণয় কৰা আৰু f ফলনটোৰ স্বাভাৱিক আদিক্ষেত্ৰ অংকন কৰা।

(ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

show that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$

5

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

দেখুওৱা যে $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$

———